SACÁNDOLE MÁS JUGO AL PROBLEMA DE LA CORONA. PRIMERA PARTE: EL TRATAMIENTO CONCEPTUAL(1)

Josip Slisko
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

RESUMEN

En este trabajo se discuten de forma crítica algunas formulaciones y formas de resolución del problema de la corona de Arquímedes, analizando cuáles son más apropiadas para los alumnos de secundaria. Aunque no se sabe con certeza cómo el propio Arquímedes abordó el problema de la corona, es posible reflexionar acerca de cuáles eran las posibles vías de solución acorde con el estado de conocimiento de física y matemática en la época de Arquímedes. Tal reflexión en el aula daría a los estudiantes una oportunidad de ver cómo se podrían aplicar los conceptos de densidad y de fuerza de empuje para solucionar el mismo.

Palabras clave: *Corona de Arquímedes, densidad, fuerza de empuje, resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN

Un objetivo importante de la enseñanza de la física es dar a los estudiantes múltiples oportunidades de aprender sobre la verdadera naturaleza de la ciencia, bastante deformada no solamente en la cultura general sino, también, a través de la enseñanza de las ciencias. Como parte de la evidencia de tal deformación pueden servir las tres leyendas populares que se narran sobre Newton, Galileo y Arquímedes.

Según la primera le bastaba a Newton un golpe de la manzana para llegar a la ley universal de gravitación. La segunda sugiere que Galileo hizo pedazos la aristotélica visión del mundo tirando dos cuerpos de diferentes pesos desde la Torre Inclinada de Pisa. Sin embargo, los documentos históricos demuestran las características completamente contrarias a tales exageradas simplificaciones.

Admitiendo que fue la caída de la manzana lo que lo hizo pensar sobre el problema, Newton todavía necesitaba más de veinte años para poder formular la ley de gravitación, teniendo que superar, aparte de las dificultades matemáticas y la falta de precisos datos experimentales, y las falsas ideas que sostenía sobre la existencia de la fuerza centrífuga.

En su obra escrita Galileo no daba mucha importancia a la demostración de que el tiempo de caída de cuerpos pesados no dependía apreciablemente de sus pesos (tal vez, porque es muy probable que no la hizo). Su interés principal fue desarrollar la teoría del movimiento "deformado" (en que velocidad cambia su "grado") y verificar experimentalmente que la caída libre es una realización natural del movimiento con la aceleración constante. Cuando combatía de verás las ideas de Aristóteles, lo prefería hacer usando "experimentos pensados" cuyo poder de destrucción consideraba mayor.

La leyenda sobre el problema de la corona de Hieron y la solución de Arquímedes, después de ser narrada por más de 20 siglos, sufrió cambios drásticos. No es raro encontrar en enciclopedias generales las versiones de la leyenda en las que no aparecen ni el problema ni la solución, sino solamente se describe Arquímedes que corre desnudo y grita ¡Eureka!¡Eureka! Lo preocupante es que tal reducción existe, también, en los libros de texto de física.

En la primera parte de este trabajo se analizan los aspectos básicos de las diferentes versiones de la leyenda elaborada en nueve libros de texto de física para ESO en España. Después, con el fin de "sacarle más jugo" al problema de la corona, se propone un enfoque didáctico que enfatiza los aspectos conceptual, visual y cognitivo del problema y de la solución. De esa manera, se trata de evitar algunos errores frecuentes en el uso del problema de la corona en la enseñanza de la física.

En la segunda parte se desarrolla un tratamiento cuantitativo basado en el razonamiento proporcional, la forma del pensamiento matemático empleado comúnmente en la época de Arquímedes.

LAS VERSIONES DE LA LEYENDA EN LIBROS DE TEXTO EN ESPAÑA Y SUS CARACTERÍSTICAS DIDÁCTICAS

Los autores de los libros de texto españoles, al narrar la leyenda, no cometen el error más común en los libros de texto de los Estados Unidos que consiste en atribuir a Arquímedes una solución moderna del problema de la corona: medir el peso de la corona en el aire y en el agua, calcular su densidad relativa y compararla con la de oro puro (tal tratamiento se discutirá con más detalles en la segunda parte). Sin embargo, hay varios fallos didácticos que merecen ser comentados. Los más graves, que revelan todas versiones, son la falta de claridad conceptual y el escaso o ausente apoyo visual al procedimiento experimental que forma parte del razonamiento en que se basa la solución.

De hecho, solamente un libro de texto (Antón Bozal et al., 1994) menciona que el concepto clave de la solución es la densidad, pero no usa tal concepto explícitamente en la solución. Con el apoyo visual, la situación es similar. Solamente un libro (Sendra Bañals et al., sin fecha), de forma poco adecuada, agrega una representación pictórica del problema y de su solución. En seguida se presentan algunos comentarios más específicos.

El problema de la corona como actividad de lectura

Varios autores diseñan el tratamiento didáctico del problema de la corona como actividad de lectura. La manera más "inmediata" es lanzar la pelota en la cancha de los estudiantes, dejándoles como tarea buscarlo por ellos mismos en la biblioteca y leerlo (Crespo Gazapo et el., 1997):

> "*Busca en la biblioteca de tu centro alguna biografía de la vida de Arquímedes y explica en términos científicos cómo resolvió el problema de averiguar si la corona del tirano de Siracusa era toda de oro o si contenía algún otro metal. ¿Cuál fue el destino del orfebre?*"

Es poco probable que los estudiantes, en biografías accesibles de Arquímedes, encuentren una descripción de la solución "en términos científicos". Además, el destino del orfebre parece poco relevante para entender conceptualmente tanto el problema como la solución.

Los autores que ahorran a los estudiantes el esfuerzo de la búsqueda, que puede terminar con una versión poco adecuada, les proporcionan el texto de la leyenda. Unos escogen entre las versiones conocidas, por ejemplo la de Gamow (España Talón et al., 1995), mientras otros confeccionan una propia (Pozas Margariños et al, 1997).

Es muy recomendable después de la lectura exigir que los estudiantes revelen su manera de entender el método usado por Arquímedes. Por eso, es bueno que el texto esté acompañado con preguntas como éstas:

> "*¿Cómo demostró Arquímedes al rey Hieron que la corona no era de oro puro? Explica con detalle el método*." (Pozas Margariños et al., 1997)

> "*¿Qué método empleó Arquímedes para ello? Descríbelo con ayuda de dibujos*." (España Talón et al., 1995)

La exploración de las ideas que tienen los estudiantes es especialmente reveladora si se insiste que las pongan en la forma visual ("con ayuda de dibujos").

A diferencia de las anteriores preguntas, en la secundaria es mejor evitar preguntas de tipo cuantitativo o reservarlas para los estudiantes más dotados. Una es ésta:

> "*¿Cuál debería ser el volumen relativo de las piezas de oro y plata y de la corona, para que tuvieran el mismo peso?*" (España Talón et al., 1995)

Mientras la respuesta "*los volúmenes relativos de oro, la corona y plata se relacionan como los valores inversos de sus densidades*" no contribuye mucho al aprendizaje, la que tomaría en cuenta el porcentaje de plata y oro para especificar más la relación sería muy complicada para el nivel de secundaria.

La solución ausente, descrita generalmente o presentada en forma visual

Los autores de tres libros de texto no consideraron pertinente presentar verbalmente la solución del problema. Por cierto, solamente en un libro de texto (Torres et al., 1993) la solución está completamente ausente. En los otros dos la situación no es mucho mejor.

Los autores de uno (Cruz León et al., 1995) dicen solamente que la solución está relacionada con el principio de hidrostática, sin dar pista alguna sobre el procedimiento y la base conceptual de la solución. Los alumnos difícilmente pueden conectar el principio de Arquímedes con la solución de problema. De hecho, todas soluciones ofrecidas en otros libros de texto no usan tal principio en sus procedimientos.

En el otro libro (Sendra Bañals et al., sin fecha), sin informar a los estudiantes, se les ofrece una idea vaga de la solución. Los 4 dibujos, con un toque cómico (¿dónde está la evidencia experimental de que esto promueve el aprendizaje?), difícilmente pueden sugerir a los alumnos cómo Arquímedes pudo resolver el problema. En el primero el rey contempla una balanza en equilibrio que tiene a un lado la corona y en otro una pesa. En el segundo, Arquímedes en la bañera grita "¡eureka!" y imagina una pieza de oro. En el tercero y el cuarto dibujo, la imaginada pieza de oro y la corona se lanzan en un recipiente lleno de agua y agua sale volando.

Solamente alguien que ya conoce el método de comparar los volúmenes de la pieza de oro y corona a través del agua desalojada entiende la relación de los dibujos con la solución del problema. La conexión entre el problema y la solución sería, tal vez, más transparente si la masa de la corona fue comparada con la misma pieza en la balanza.

Soluciones poco comunes

Dos soluciones ofrecidas como supuestas soluciones de Arquímedes requieren cortos comentarios. La primera es:

> "*Para resolver introdujo la corona en agua y midió la subida de nivel del líquido en el recipiente, lo que le permitió calcular el volumen de la corona y a partir de aquí su densidad. Conociendo la densidad dedujo entonces que no contenía únicamente oro*." (Martín Martín, 1998)

Esto es otra solución moderna en que el valor la densidad de la corona se calcula y compara con la densidad de oro. Por las razones ya mencionadas, tal vía de la solución probablemente no fue la que pudo emplear Arquímedes.

La segunda es ésta:

> "*Sumergió la corona en el agua y midió el volumen del agua desalojada: éste era el volumen de la corona* [...] *Entonces, pesó una cantidad de oro puro cuyo volumen era igual que el de agua desalojada. El peso de aquél debería coincidir con el peso de la corona, pero no fue así: la corona pesaba menos. De esta forma Arquímedes descubrió que el artesano había engañado al rey.*" (García Pozo y Equipo Edebé, 1996)

Aunque la solución es lógicamente posible, y compatible con el razonamiento proporcional de la época de Arquímedes, es poco práctica. Si el peso de la corona fue adecuado, es más fácil medir el volumen de la pieza patrón (o con una pieza cuyo peso es igual al peso de la corona) que confeccionar una pieza de oro que tenga el volumen de la corona.

LOS ASPECTOS DEL PROBLEMA DE LA CORONA QUE REQUIEREN ACLARACIÓN

Todos saben que el rey Hierón pretendía regalar a los dioses una nueva corona y que dio a su platero una cantidad conocida de oro puro para hacerla. Al recibir la corona, que tuvo el peso del oro entregado, el rey quiso saber si la corona era de verdad de oro puro o el platero reemplazó una parte de oro por plata. Le tocó a Arquímedes satisfacer la curiosidad real.

¿Cómo resolvió Arquímedes el problema de la corona? No se sabe con certeza la respuesta a esta pregunta (Hartman Hoddeson, 1972), pero es posible reflexionar conceptualmente acerca de cuáles eran las posibles vías de solución acorde con el estado de conocimiento de física y matemática en la época de Arquímedes. Tal reflexión en el aula daría a los estudiantes una oportunidad de ver cómo se podrían aplicar los conceptos de densidad y de fuerza de empuje para solucionar el problema de la corona.

Como no se dispone de una versión auténtica de lo ocurrido con la corona, es mejor reconstruir cuidadosamente la leyenda, enfatizando los detalles que llevan a un mejor entendimiento tanto del problema como de sus diferentes soluciones. Un buen cuento despierta el interés de los estudiantes y forma la base de una enseñanza efectiva (Egan, 1988). Pero cuando le faltan claridad conceptual y cuando no toma en cuenta las ideas de estudiantes, el resultado es opuesto.

Formulaciones "fuerte" y "débil" del problema

Para tener más efectivo el uso didáctico de la leyenda, es útil distinguir entre "la formulación fuerte" y "la formulación débil" del problema (Slisko, 1997). "La formulación fuerte" del problema sería:

> *"Suponiendo que la corona estaba hecha de oro y plata, ¿cuál era el porcentaje de plata?"*

El entendimiento de las posibles soluciones de tal formulación (*Slisko, 1977*) presupone razonamiento físico y procedimiento matemático más avanzados y, por eso, "la formulación fuerte" sería adecuada para los alumnos de preparatoria o del primer curso de física en la universidad. Las soluciones de tal formulación se discutirán en la segunda parte del trabajo.

Para los alumnos de secundaria sería más adecuada "la formulación débil" del problema de la corona (Slisko, 1997):

> *"¿Era la corona hecha de oro puro?"*

Hay que destacar que la versión más conocida de la leyenda, escrita por el arquitecto romano Marco Vitruvio (Gamow, 1971), presenta el problema en su "formulación fuerte" (¿cuál era el porcentaje de plata?) y describe la parte experimental que le corresponde (en que se ocupan la corona y pedazos de oro y plata del mismo peso). Pero tal procedimiento puede parecer misterioso a los estudiantes si se sugiere como la solución del problema en su "formulación débil". Este riesgo corren dos versiones españoles (Antón Bozal et al., 1994; España Talón et al., 1995), que siguen el patrón de Vitruvio.

Ideas alternativas de los alumnos

Aparte de ideas alternativas que sostienen los estudiantes acerca de la fuerza de empuje y de la cantidad de agua desalojada, es necesario tomar en cuenta que ellos también revelan una idea errónea respecto al peso de la corona. Aunque parece sorprendente, algunos alumnos creen que la corona pesaba menos y que el rey, al recibirla, no lo pudo notar porque no existían las balanzas. Para ellos el procedimiento de Arquímedes fue una manera complicada de medir el peso de la corona.

Por eso, al formular el problema, es de suma importancia insistir que la corona entregada pesaba igual que el oro recibido por el platero. En la mayoría de los libros de texto, este detalle crucial no se menciona. Para enfatizarlo, la parte correspondiente de la leyenda se podría narrar así:

> "*El rey tomó dos pedazos de oro puro, los puso en la balanza y mostró al platero que eran del mismo peso. También, advirtió que, al recibir la corona, comparará su peso con el peso de pedazo patrón que quedará en su posesión. Cuando el platero entregó la corona, el rey hizo lo advertido, comparó a través de la balanza los pesos de la corona y de patrón y encontró que la corona sí tuvo el peso esperado*".

Para aumentar la coherencia del cuento, cada narrador puede añadir los detalles "decorativos" que explican por qué surge la desconfianza del rey (por ejemplo, le suspiró su consejero o corrió el rumor de que el platero quiso mostrar a su prometida que era listo de robar el oro real sin que el rey se dará cuenta).

Lo que importa es formular el problema de manera más sencilla: ¿Era la corona hecha de oro puro o no? Evitar formulaciones "poéticas": ¿Era honesto el orfebre? o ¿Se usó integralmente el oro entregado?

También, es útil agregar "condiciones reales" para la solución. Primero, no se puede, de manera alguna, dañar la corona. Segundo, el rey, debido a su ignorancia matemática, no quiso aceptar cálculo alguno como parte de la solución. Es decir, el procedimiento debería ser tan sencillo y contundente para que no quede la mínima duda sobre la composición de la corona.

POSIBLES SOLUCIONES DE ARQUÍMEDES

¿Cómo iba a resolver Arquímedes el problema respetando condiciones reales? Tiene la corona y tiene un pedazo de oro que tiene la misma masa y debe descubrir, sin ni siquiera rasgar la corona, si está hecha de oro puro.

El desglose conceptual del problema puede ser éste:

> *"Si la corona y el pedazo de oro están hechos de la misma sustancia, tienen que tener la misma densidad. Es decir, aparte de la misma masa, tienen que tener el mismo volumen. Entonces, el problema de la corona se reduce a un problema más específico: ¿cómo comparar los volúmenes de dos cuerpos, de los cuales por lo menos uno (la corona) tiene forma irregular cuyo volumen no es posible calcular a partir de los resultados de mediciones geométricas?*"

Comparar volúmenes a través de agua desalojada

Si se sumerge un cuerpo en un recipiente con agua, el nivel de agua en el recipiente sube. Este se debe al desalojo de agua por la presencia del cuerpo (el agua no puede ocupar el espacio ocupado por el cuerpo). El volumen de agua desalojada es igual al volumen del cuerpo sumergido.

Este hecho pudo usar Arquímedes para comparar los volúmenes del pedazo patrón y de la corona.

Para la demostración se necesita un recipiente de vidrio con agua. El tamaño debe ser adecuado. Si es demasiado grande no será posible notar pequeñas diferencias en los niveles de agua. Si es demasiado chico, el agua saldrá y, otra vez, la comparación de volúmenes será imposible.

Entonces, Arquímedes pudo primero poner el pedazo patrón y marcar el nuevo nivel de agua en el recipiente debido a su presencia. Después de sacar el pedazo patrón, se pone la corona. Antes de ponerla, Arquímedes pudo explicar al rey:

> "*Si la corona está hecha de oro puro, su volumen es igual al volumen del pedazo patrón, y el nivel de agua, con la corona sumergida, será el mismo (Figura 1.a). Si falta algo de oro y la masa faltante es "recuperada" agregando plata, el volumen de la corona será mayor que el volumen del pedazo patrón. Esto se debe al hecho de que la densidad de plata es menor que la densidad de oro. Si la cantidad de plata agregada tiene misma masa como el oro faltante, tiene que tener un volumen mayor. Al ser esto el caso, el nivel de agua, con la corona sumergida, debe ser más alto*" (Figura 1.b).

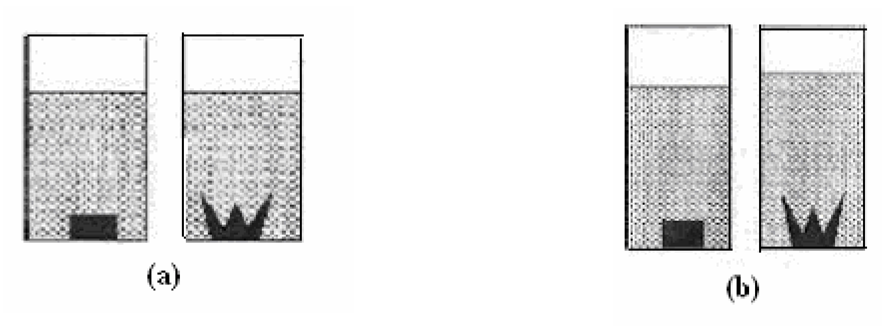

Figura 1

Aunque conceptualmente muy transparente, esta posible solución recibió muchas criticas. Incluso, la criticó Galileo Galilei por posibles imprecisiones (*Hartman Hoddeson, 1972*). Por eso, sería bueno discutir con los estudiantes cuáles factores podrían causar los errores en medir volúmenes del pedazo patrón y de la corona y estimar el valor del posible error en milímetros cúbicos. Por ejemplo, para un recipiente cilíndrico cuyo radio es de 150 milímetros, un error en la marcación de nivel de una sola centésima de milímetro lleva a un error en la comparación de volúmenes que es mayor de 700 milímetros cúbicos. Para elaborar más esta idea, una pregunta podría ser: De dos recipientes cilíndricos con la misma capacidad, uno más alto que otro, ¿cuál sería más adecuado para comparar volúmenes?

Comparar volúmenes a través de la fuerza de empuje

Si Arquímedes se dio cuenta de que el primer método no tuvo la precisión suficiente, pudo usar la fuerza de empuje para comparar volúmenes indirectamente con una precisión mucho mayor. Su explicación al rey pudo ser ésta:

> "*La corona y el pedazo patrón tienen el mismo peso, lo que se mostró usando la balanza* (Figura 2.a). *Si la corona está hecha de oro puro, tiene el mismo volumen como el pedazo patrón*.
>
> *Por tener el mismo volumen, ambos, al sumergirlos en agua, desalojarán la misma cantidad de agua y sufrirán la misma fuerza de empuje (igual, como apenas mostré, al peso de agua desalojada). En tal caso, el equilibrio de la balanza se mantendrá y después de sumergir la corona y el pedazo patrón en agua* (Figura 2.b).
>
> *Si falta algo de oro y la masa faltante es "recuperada" agregando plata, el volumen de la corona será mayor que el volumen del pedazo patrón. Esto se debe al hecho de que la densidad de plata es menor que la densidad de oro. Si la cantidad de plata agregada tiene misma masa como el oro faltante, tiene que tener un volumen mayor. Si esto es el caso, la corona sumergida sufrirá una mayor fuerza de empuje y, al sumergir la corona y el pedazo patrón, el equilibrio de la balanza no se mantendrá. El peso aparente del pedazo patrón será mayor y el extremo del cual está colgado bajará* (Figura 2.c).

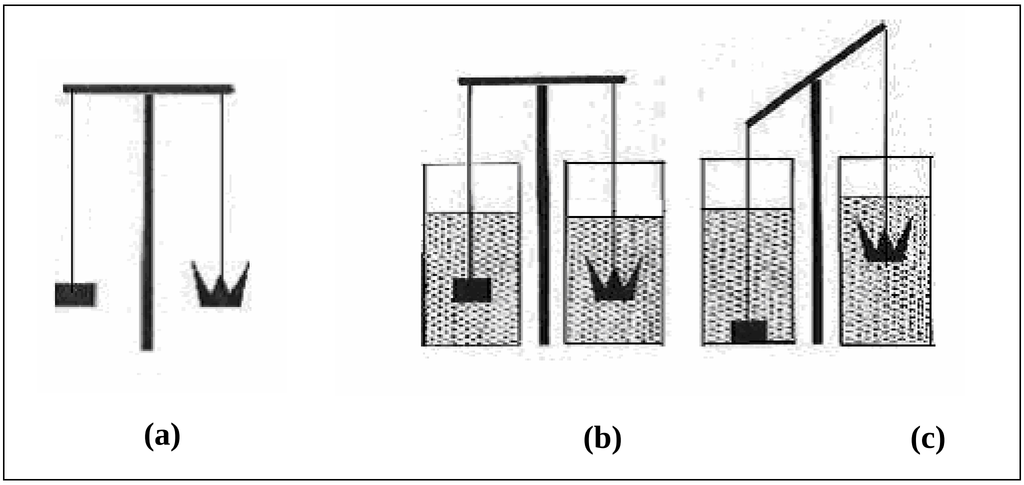

Figura 2

Para demostrar a los estudiantes la gran diferencia en precisión entre estos dos métodos de comparar volúmenes, sería bueno tener una balanza sensitiva. Al establecer equilibrio entre un cuerpo y las pesas correspondientes, explorar con los estudiantes cuántas gotas de agua bastan para desequilibrar la balanza. Normalmente son unas cuantas. Su volumen (unos milímetros cúbicos) representa el posible error en la comparación de volúmenes de manera indirecta usando la fuerza de empuje.

CONCLUSIÓN

El enfoque expuesto enfatiza tanto la claridad conceptual del problema y de la solución como la importancia del apoyo visual, los elementos didácticos que frecuentemente están deformados o son ausentes en las versiones encontradas en libros de texto, tanto en España como en otras partes.

Es probable que con tal enfoque los estudiantes tengan una plena experiencia con los razonamientos en que se basan dos diferentes caminos hacia solución de un problema famoso en la historia de la ciencia.

Además, verán que tales caminos no son equivalentes respecto a la certeza de las conclusiones, pues en uno los posibles errores son más grandes que en el otro. ¡Conocer límites de la ciencia es tan importante como admirar su belleza intelectual!

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFGICAS

ANTÓN BOZAL, J. L., DE LA CRUZ LÓPEZ M. C. y GONZÁLEZ FERRERAS, F. (1994). *Ciencias de la Naturaleza. Física–Química. ESO 2^0 ciclo (Curso 3^0).* Madrid: Editorial Editex, p. 24

CRESPO GAZAPO, E., FERNÁNDEZ MARTÍNEZ, J. M., GÓMEZ GÓMEZ, S. Y VALLEJO SACTRISTÁN, M. (1997). *Física y Química. 2º Ciclo de ESO. 4º Curso*. Madrid: Ediciones Akal, p. 82.

CRUZ LEÓN, A. y CASTELLANO OLMEDO, E. (1995). *Física y Química. Ciencias de la Naturaleza. ESO 4.* Madrid: Bruño, p. 115

EGAN, K. (1988). *Teaching as story telling*. London: Routledge.

ESPAÑA TALÓN, J. A., LÓPEZ FENOY, V., MORALES ORTÍZ, J. V. y ARRIBAS PURAS, C. (1995). *Física y Química. Ciencias de la Naturaleza. 4.º Secundaria*. Madrid: Edelvives, p. 98.

GAMOW, G. (1971). *Biografía de la física*. Madrid: Salvat Editores y Alianza Editorial. pp. 20–21.

GARCÍA POZO, T. y EQUIPO EDEBÉ (1996). *Física y Química. ESO 4. Ciencias de la Naturaleza*. Barcelona. Edebé, página 139.

HARTMAN HODDESON, L. (1972). How Did Archimedes Solve King Hiero's Crown Problem? –An Unaswered Question. *The Physics Teacher*, 10 (1), pp. 14–19.

POZAS MARGARIÑOS, A.; GARCÍA PÉREZ, J. A.; LLANA RUBIO, J. C., y PEÑA SAINZ, Á. (1997). *Física y Química 4. ESO. Ciencias de la Naturaleza.* Madrid: McGraw-Hill, p. 82

MARTÍN MARTÍN, J.; RUIZ CARRERO, E.; FRAILE SÁNCHEZ, J. M. y CARRASCOSA ALÍS, J. (1998). *Física y Química. Secundaria 2000. Curso 4º.* Madrid: Grupo Santillana de Ediciones, p. 75.

SENDRA BAÑALS, F., ENCISO ORELLANA, E., CHORRO GUARDIOLA, F. y GARCÍA GREGORIO, M. (sin fecha). *Física y Química. Proyecto Avizor. ESO 4*. Fuente del Jarro–Paterna: Editorial ECIR, p. 26

SLISKO, J. (1997). La corona de Herón en la enseñanza de la física. *Boletín de la Sociedad Méxicana de Física*, 11 (4), 231 – 232.

TORRES, E. DE M., BALIBREA LÓPEZ, S., GALLEGOS DÍAZ, J. A., GARCÍA MONTES, J. M. y MARTÍNEZ JEREZ, M. L. (1993). Física y Química 4. Proyecto 2000. Sevilla: Algaide Editores, p. 67.

[1] *El artículo fue primero publicado en gallego en Boletín das Ciencias de Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia (Volumen 41, Febrero de 2000, pp. 33 – 42).*